

Однородная цепочка атомов разной массы: m и M . Смещения от положения равновесия обозн. соотв. η_n и ξ_n .

Пост. гармон. связи χ . Рассм.-м внешние силы взаимодей-я только соседних атомов.

$$\Rightarrow \begin{cases} M \ddot{\xi}_n = \chi (\eta_n - 2\xi_n + \eta_{n+1}) \\ m \ddot{\eta}_n = \chi (\xi_{n-1} - 2\eta_n + \xi_n) \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать стационар. решение смещений в виде бегущих волн:

$$(2) \begin{cases} \xi_n = \xi_0 e^{i(\omega t - k a b)} \\ \eta_n = \eta_0 e^{i(\omega t - k n b + \frac{\omega b}{2})} \end{cases}, \text{ где } k \in \left[-\frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{b}\right].$$

b - рассм. между сосед-ми атомами.
Т.е. положение
разных атомов с одинак. номерами и
отлич-ми на $b/2$.

Подст.-м (2) в (1). $\Rightarrow$:

$$A = \begin{cases} (M\omega^2 - 2\chi)\xi_0 + \chi(e^{i\frac{k b}{2}} + e^{-i\frac{k b}{2}})\eta_0 = 0 \\ \chi(e^{i\frac{k b}{2}} + e^{-i\frac{k b}{2}})\xi_0 + (m\omega^2 - 2\chi)\eta_0 = 0 \end{cases}$$

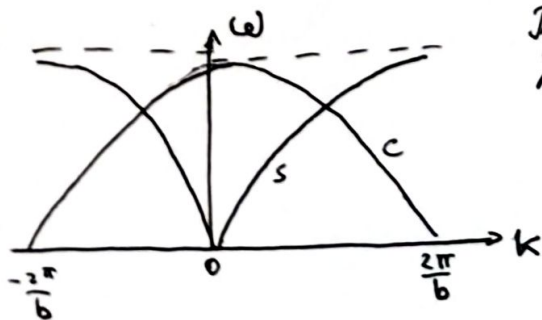
Если $\det A = 0$, то получим дискв. уравнение гр-е:

$$M m \omega^4 - 2\chi(M+m)\omega^2 + 2\chi^2(1 - \cos k b) = 0.$$

Решение этого гр-а имеем вид: $\omega^2 = \frac{\chi}{Mm} (M+m \pm \sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm \cos k b})$

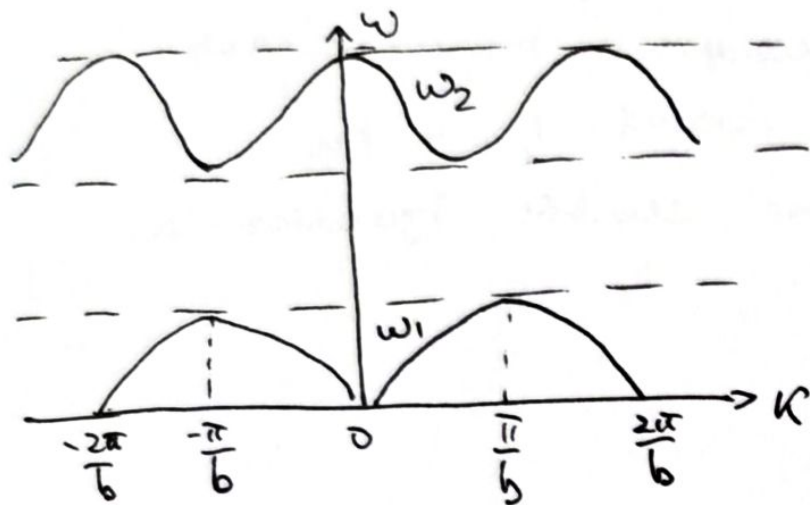
$$1. M=m: \omega^2 = \frac{2\chi}{m} (1 \pm \cos \frac{k b}{2}) \quad \Rightarrow \text{получим две ветви частот.}$$

$$\omega_+ = 2\sqrt{\frac{\chi}{m}} \cos \frac{k b}{4} \quad \omega_- = 2\sqrt{\frac{\chi}{m}} \sin \frac{k b}{4}$$



При движении всей системы (с) на $\frac{2\pi}{b}$ каждая точка этой кривой переходит в крайнюю (s) $\Rightarrow$ можно не рассм-ть 1-е ветв. (кос.)

2. При $M \neq m$



"-": $\omega_1(k)$ - аккусти. волна

"+": $\omega_2(k)$ - оптич. волна

При малых k , ω_1 мал и идет с линейкой в зав. от k .

В этом случае $\xi_0 = \eta_0 \Rightarrow$ атомы разн. на малом по сравн. с длиной

волны отрезке колеблются в одинак. фазе.

ω_2 хар-я тем, что при $k \rightarrow 0$ частота $\rightarrow \infty$ так.

$\Rightarrow M\xi_0 = -m\eta_0 \Rightarrow$ соседние атомы колеблются в противоположных фаз.

На границах $-\frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{b}$:

$\omega_1(k)$:

$\omega_2(k)$: